Boordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Buigraaklijn

1 **maximumscore 4**

•	$f'(x) = 6(2x-1)^2 \cdot 2 + 6(2x-1) \cdot 2$	2
•	Herleiden tot $f'(x) = 12(4x^2 - 4x + 1) + 24x - 12$	1
•	Herleiden tot $f'(x) = 48x^2 - 24x$	1

of

•	$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$	1
•	$(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$	1
•	$f(x)$ herleiden tot $f(x) = 16x^3 - 12x^2 + 1$	1
•	$f'(x) = 48x^2 - 24x$	1

Opmerking
Voor het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

2 **maximumscore 5**

•	$f''(x) = 96x - 24$	1
•	$f''(x) = 0$ geeft $x = \frac{1}{4}$	1
•	$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$	1
•	$f'(\frac{1}{4}) = -3$	1
•	Een vergelijking van k is $y = -3x + \frac{5}{4}$	1

Vraag	Antwoord	Scores

Op de diagonaal van een vierkant

3 maximumscore 6

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ — 1
- Punt P heeft coördinaten (p,p) (met $0<p<2$) — 1
- $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}p-1\\p\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DP}=\begin{pmatrix}p\\p-2\end{pmatrix}$ — 1
- $\begin{pmatrix}p-1\\p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p\\p-2\end{pmatrix}=0$ — 1
- $p^2-p+p^2-2p=0$ geeft $p=\frac{3}{2}$ ($p=0$ voldoet niet) — 1
- $AP=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ — 1
- Punt P heeft coördinaten (p,p) (met $0<p<2$) — 1
- Lijn MP heeft rc $\dfrac{p}{p-1}$ (voor $p\neq 1$) en lijn DP heeft rc $\dfrac{p-2}{p}$ — 1
- $\dfrac{p}{p-1}\cdot\dfrac{p-2}{p}=-1$ — 1
- Hieruit volgt $p=\frac{3}{2}$ ($p=0$ voldoet niet) — 1
- $AP=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ — 1
- Als DP en MP loodrecht op elkaar staan, dan ligt P op de cirkel met middellijn MD — 1
- (Dat is de cirkel met middelpunt $(\frac{1}{2},1)$ en straal $\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}$, dus) een vergelijking van deze cirkel is $(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$ — 1
- Snijden met de lijn AP met vergelijking $y=x$ geeft $(x-\frac{1}{2})^2+(x-1)^2=\frac{5}{4}$, dus $2x^2-3x=0$ — 1
- Dit geeft $x=\frac{3}{2}$ ($x=0$ voldoet niet) — 1
- $AP=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ — 1
- Punt P heeft coördinaten (p, p) (met $0 < p < 2$) — 1
- Een redenering waaruit volgt dat $\angle DPR = \angle PMQ$ (of $\angle RDP = \angle QPM$) (met R de loodrechte projectie van P op CD en Q de loodrechte projectie van P op AB) — 1
- Ook geldt (omdat $D(0,2)$, $R(p,2)$, $P(p,p)$ en $Q(p,0)$) $DR = PQ$, dus $\Delta PRD \cong \Delta MQP$ — 1
- $MQ = PR$ geeft $p-1 = 2-p$ ofwel $p = \frac{3}{2}$ — 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Een redenering waaruit volgt dat $\angle DPR = \angle PMQ$ (of $\angle RDP = \angle QPM$) (met R de loodrechte projectie van P op CD en Q de loodrechte projectie van P op AB) — 1
- Ook geldt $DR = PQ$, dus $\Delta PRD \cong \Delta MQP$ — 1
- Dus $MQ = PR$ en (omdat $\angle PCR = 45°$) $PR = RC$ — 1
- Dus $MQ = PR = RC = BQ$ en dus is Q het midden van MB — 1
- Hieruit volgt $AQ : QB = 3 : 1$ — 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (want ΔAQP is gelijkvormig met ΔABC) (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld $A(0,0)$, $D(0,2)$ en $M(1,0)$ — 1
- Punt P heeft coördinaten (p, p) (met $0 < p < 2$) — 1
- $DP = \sqrt{p^2 + (2-p)^2}$ en $MP = \sqrt{p^2 + (p-1)^2}$ en $MD = \sqrt{5}$ — 1
- $DP \perp MP$ als $p^2 + (2-p)^2 + p^2 + (p-1)^2 = 5$ — 1
- Hieruit volgt $p = \frac{3}{2}$ ($p = 0$ voldoet niet) — 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

Golvend ertussendoor

4 maximumscore 5

- $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{2\sin^2(x)}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- $f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$ (en $2\sin^2(x) \neq 0$) 1
- $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$ en $f(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{1}{2}$ 1
- Het bereik is $y \leq -\frac{1}{2}$ of $y \geq \frac{1}{2}$ 1

of

- f heeft een minimum als $\sin(x)$ maximaal is 1
- $\sin(x)$ is maximaal 1 dus het minimum van f is $\frac{1}{2}$ 1
- f heeft een maximum als $\sin(x)$ minimaal is 1
- $\sin(x)$ is minimaal –1 dus het maximum van f is $-\frac{1}{2}$ 1
- Het bereik is $y \leq -\frac{1}{2}$ of $y \geq \frac{1}{2}$ 1

Opmerking
Voor het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

5 **maximumscore 5**

- $a\cos(x) = \dfrac{1}{2\sin(x)}$ geeft $2a\cos(x)\sin(x) = 1$ 1
- (Voor $a = 0$ zijn er geen oplossingen en voor $a \neq 0$ geldt:) $a\sin(2x) = 1$ en dit geeft $\sin(2x) = \frac{1}{a}$ 1
- Deze vergelijking heeft alleen oplossingen als $-1 \leq \frac{1}{a} \leq 1$ 1
- Dus er zijn geen oplossingen als $\frac{1}{a} > 1$ (dus $0 < a < 1$) en als $\frac{1}{a} < -1$ (dus $-1 < a < 0$) 1
- Dus voor $-1 < a < 1$ hebben de grafieken geen punten gemeenschappelijk 1

of

- $f(x) = g(x)$ geeft $a\cos(x) = \dfrac{1}{2\sin(x)}$ dus $a = \dfrac{1}{2\cos(x)\sin(x)}$ en $f'(x) = g'(x)$ geeft $-\dfrac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} = -a\sin(x)$ 1
- Substitutie van a geeft $-\dfrac{\cos(x)}{2\sin^2(x)} = \dfrac{-\sin(x)}{2\cos(x)\sin(x)}$ (of $\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$) 1
- Hieruit volgt $\cos^2(x) = \sin^2(x)$ dus $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ 1
- Dan volgt $a = 1$ of $a = -1$ 1
- Dus voor $-1 < a < 1$ hebben de grafieken geen punten gemeenschappelijk 1

Efficiënt testen

6 maximumscore 4

- $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = 1000 \cdot \left(-\dfrac{1}{n^2} - \ln(0{,}8) \cdot 0{,}8^n \right)$ 2
- Voor $n = 4$ geeft dit de waarde 28,8… 1
- Deze waarde is positief dus het laagste punt ligt links van $n = 4$ 1

Opmerking
Voor het eerste antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

7 maximumscore 4

- $T(n) = T(n+1)$ geeft $N \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n\right) = N \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n+1} - (1-p)^{n+1}\right)$ 1
- Herleiden tot $(1-p)^n - (1-p)^{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ 1
- $(1-p)^n - (1-p)^{n+1} = (1-p)^n\left(1-(1-p)\right) = p(1-p)^n$ 1
- Voor de rest van de herleiding 1

of

- $T(n) = T(n+1)$ geeft $N \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n\right) = N \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n+1} - (1-p)^{n+1}\right)$ 1
- Herleiden tot $\dfrac{1}{n} - (1-p)^n = \dfrac{1}{n+1} - (1-p)^{n+1}$ 1
- Dit vervolgens herleiden tot $1 = n(n+1)\left((1-p)^n - (1-p)^{n+1}\right)$ 1
- $(1-p)^n - (1-p)^{n+1} = (1-p)^n\left(1-(1-p)\right) = p(1-p)^n$ (en de rest van de herleiding) 1

8 maximumscore 3

- Als $p = 0{,}025$, dan volgt uit de tabel dat $n = 7$ 1
- De vergelijking $750 = N \cdot \left(1 + \dfrac{1}{7} - (1-0{,}025)^7\right)$ moet worden opgelost 1
- Het gevraagde aantal monsters is 2456 1

Opmerking
Voor het antwoord 2457 geen scorepunten in mindering brengen.

Begrensde gebieden

9 maximumscore 7

- De integraal $\int_0^q f(x)\mathrm{d}x$ moet worden berekend — 1
- Een primitieve van $\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$ is $8\sqrt{x+1}$ — 1
- De oppervlakte onder de grafiek is $8\sqrt{q+1}-8$ — 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $4q$, de oppervlakte onder de grafiek is dus $2q$ — 1
- $8\sqrt{q+1}-8=2q$ herleiden tot $64(q+1)=(8+2q)^2$ — 1
- Dit geeft $4q^2-32q=0$ — 1
- $q=8$ — 1

10 maximumscore 5

- Voor de inverse functie g geldt $x=\dfrac{4}{\sqrt{y+1}}$ dus $\sqrt{y+1}=\dfrac{4}{x}$ — 1
- Dit herleiden tot $y=\dfrac{16}{x^2}-1$ — 1
- Beschrijven hoe de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de grafiek van g met de GR gevonden kan worden — 1
- Deze x-coördinaat is 2,22… — 1
- $\displaystyle\int_{2{,}22...}^{4}\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}}-\frac{16}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x=2{,}10...$ dus de gevraagde oppervlakte is $2{,}1$ — 1

of

- Beschrijven hoe de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de lijn $y=x$ met de GR gevonden kan worden — 1
- Deze x-coördinaat is 2,22… — 1
- Er geldt: $\displaystyle\int_{2{,}22...}^{4}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_{2{,}22...}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x-\left(\int_{0}^{2{,}22...}f(x)\,\mathrm{d}x-(2{,}22...)^2\right)$ — 2
- (Dit geeft $3{,}51...-(6{,}37...-(2{,}22...)^2)=2{,}10...$ dus) de gevraagde oppervlakte is $2{,}1$ — 1

Opmerking
Voor het derde antwoordelement van het tweede antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Cirkels en lijnen

11 maximumscore 5

	• Er geldt: $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\cos(t)\\2\sin(t)\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}2+\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$	1
	• Er moet gelden: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, dus $\begin{pmatrix}2\cos(t)\\2\sin(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}=0$	1
	• Hieruit volgt $4\cos(t)+2\cos^2(t)+2\sin^2(t)=0$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	• Herleiden tot $\cos(t)=-\frac{1}{2}$	1
	• De oplossingen: $t=\frac{2}{3}\pi$ en $t=\frac{4}{3}\pi$	1
	of	
	• Er geldt: $rc_{OP}=\dfrac{2\sin(t)}{2\cos(t)}$ (met $\cos(t)\neq 0$) en $rc_{OQ}=\dfrac{\sin(t)}{2+\cos(t)}$	1
	• Er moet gelden: $rc_{OP}\cdot rc_{OQ}=-1$, dus $\dfrac{2\sin(t)\cdot\sin(t)}{2\cos(t)\left(2+\cos(t)\right)}=-1$	1
	• Hieruit volgt $\sin^2(t)+2\cos(t)+\cos^2(t)=0$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	• Herleiden tot $\cos(t)=-\frac{1}{2}$	1
	• De oplossingen: $t=\frac{2}{3}\pi$ en $t=\frac{4}{3}\pi$	1

Vraag	Antwoord	Scores

12 maximumscore 5

• Er geldt: $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$	1
• Een vectorvoorstelling van de lijn door P en Q is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) - 2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$	2
• Voor het snijpunt met de x-as geldt: $y = 0$, dus $r = -2$	1
• Dus $x = 2\cos(t) + -2(\cos(t) - 2)) = 4$ (en dat is onafhankelijk van t)	1

of

• Er geldt: $rc_{PQ} = \frac{\sin(t)}{\cos(t) - 2}$	1
• Een vergelijking van de lijn door P en Q is $y = \frac{\sin(t)}{\cos(t) - 2}(x - 2\cos(t)) + 2\sin(t)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	2
• Voor het snijpunt met de x-as geldt: $\frac{\sin(t)}{\cos(t) - 2}(x - 2\cos(t)) + 2\sin(t) = 0$	1
• Dus $x = -2\sin(t) \cdot \frac{\cos(t) - 2}{\sin(t)} + 2\cos(t) = 4$ (en dat is onafhankelijk van t)	1

of

• Omdat P en Q dezelfde hoeksnelheid hebben, is driehoek AOP gelijkvormig met driehoek ANQ (N is het middelpunt van c_Q)	1
• Dus $\frac{OA}{NA} = \frac{OP}{NQ}$	1
• Hieruit volgt $\frac{2 + NA}{NA} = \frac{2}{1}$	1
• Hieruit volgt $NA = 2$	1
• Dus de x-coördinaat van A is 4 (en dat is onafhankelijk van t)	1

Opmerking
Voor het tweede antwoordelement van zowel het eerste als het tweede antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores

13 **maximumscore 6**

- Er geldt: $M\left(1+\frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t)\right)$ — 1
- Een vergelijking van c_P is $x^2 + y^2 = 4$ — 1
- M ligt in het buitengebied totdat M op c_P ligt, dus de vergelijking $\left(1+\frac{3}{2}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sin(t)\right)^2 = 4$ moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost — 1
- Dit geeft $t = 1{,}318...$ — 1
- (De baan is symmetrisch ten opzichte van de x-as, dus) $\frac{2(1{,}318... - 0{,}723)}{2\pi} = 0{,}1894...$ dus het gevraagde percentage is 19(%) — 1

of

- Een vergelijking van c_P is $x^2 + y^2 = 4$ — 1
- Er geldt: $M\left(1+\frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t)\right)$, dus een vergelijking van c_M is $(x-1)^2 + y^2 = 1{,}5^2$ — 1
- Beschrijven hoe de snijpunten van c_P en c_M (met de GR) gevonden kunnen worden — 1
- Dit geeft $x = 1{,}375$ dus $1+\frac{3}{2}\cos(t) = 1{,}375$ — 1
- Dit geeft $t = 1{,}318...$ — 1
- (De baan is symmetrisch ten opzichte van de x-as, dus) $\frac{2(1{,}318... - 0{,}723)}{2\pi} = 0{,}1894...$ dus het gevraagde percentage is 19(%) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Asymptoot

14 maximumscore 3

- Voor $x<1$ geldt: $f(x)=-x+1+\dfrac{x-5}{2x-5}$ 1
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-5}{2x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{5}{x}}{2-\frac{5}{x}}=\frac{1}{2}$ (of: een redenering als “voor grote negatieve waarden van x gaat de breuk $\dfrac{x-5}{2x-5}$ naar $\frac{1}{2}$”) 1
- Een vergelijking van lijn k is $y=-x+1\frac{1}{2}$ 1

15 maximumscore 6

- (Het snijpunt met de x-as ligt rechts van het knikpunt, dus) $x-1+\dfrac{x-5}{2x-5}=0$ 1
- Dit herleiden tot $x-5=(2x-5)(1-x)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking zonder gebroken vormen) 1
- Herleiden tot $2x^2-6x=0$ 1
- Dit geeft $x=3$ ($x=0$ voldoet niet) 1
- ($x=2\frac{1}{2}$ is een nulpunt van de noemer en niet van de teller van $\dfrac{x-5}{2x-5}$, dus) de grafiek heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x=2\frac{1}{2}$ 1
- De grafiek van f ligt onder de x-as voor $2\frac{1}{2}<x<3$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Twee punten op een grafiek

16 maximumscore 5

- Er geldt: $P\left(p, p\cdot \mathrm{e}^{p}\right)$ en $Q\left(2p, 2p\cdot \mathrm{e}^{2p}\right)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $\dfrac{2p\cdot \mathrm{e}^{2p}-p\cdot \mathrm{e}^{p}}{p}$ 1
- Er moet gelden: $2\cdot \mathrm{e}^{2p}-\mathrm{e}^{p}=6$ 1
- Beschrijven hoe uit deze vergelijking een exacte waarde voor e^{p} gevonden kan worden 1
- Dit geeft (omdat $\mathrm{e}^{p}=-\frac{3}{2}$ geen oplossing heeft) $p=\ln(2)$ 1

of

- Er geldt: $P\left(p, p\cdot \mathrm{e}^{p}\right)$ en $Q\left(2p, 2p\cdot \mathrm{e}^{2p}\right)$ 1
- Een vergelijking van de lijn door P en Q is $y=6x+b$; invullen van de coördinaten van P geeft $b=p\cdot \mathrm{e}^{p}-6p$ 1
- Uit invullen van de coördinaten van Q in $y=6x+p\cdot \mathrm{e}^{p}-6p$ volgt $2\cdot \mathrm{e}^{2p}-\mathrm{e}^{p}=6$ 1
- Beschrijven hoe uit deze vergelijking een exacte waarde voor e^{p} gevonden kan worden 1
- Dit geeft (omdat $\mathrm{e}^{p}=-\frac{3}{2}$ geen oplossing heeft) $p=\ln(2)$ 1